

Über die Strahlung der freien Elektronen im Coulombfeld.

Von **J. R. Oppenheimer***, zurzeit in Zürich.

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 6. Mai 1929.)

Für die Strahlung eines Elektrons im Felde eines positiven Ions ergibt die Quantenmechanik Werte, die von den klassischen und korrespondenzmäßigen wesentlich abweichen. Die neuen Werte ergeben die richtige Größenordnung für die kontinuierliche Absorption im Innern der Sterne.

Bekanntlich liefert die Kramersche Theorie eine befriedigende Erklärung der Bremsstrahlung**. Auf Grund dieser Theorie lassen sich nicht nur die Form der Isochromaten und der spektralen Verteilung verstehen; sie gibt auch die Größenordnung der Gesamtstrahlung richtig wieder. Dagegen führt die Anwendung der Theorie auf die Berechnung der kontinuierlichen Absorption im Innern der Sterne zu Werten, die zehnmal kleiner sind als die, die man aus den astronomischen Daten erhält***. Diese sind also weder mit der Theorie noch mit den Experimenten im Einklang.

Nun sind die Zustände im Innern der Sterne wesentlich von denjenigen verschieden, die man in der Röntgenröhre trifft. Denn in einem Falle sind die Atome, auf die das strahlende Elektron trifft, unzerstörte normale Atome; im anderen Falle aber sind sie wegen der großen Ionisation praktisch nackte Ionen. Dieser Unterschied bringt nun mit sich, daß für Frequenzen oberhalb der Kantenfrequenz die Strahlung in den zwei Fällen wesentlich verschieden sein muß. Da nun in beiden Fällen die Strahlung an der Kante kontinuierlich verläuft, darf man nicht ohne weiteres schließen, daß die kontinuierliche Strahlung in beiden Fällen praktisch die gleiche sein wird; in der Nähe der Kante könnte man Abweichungen erwarten. Freilich sind diese Abweichungen in der K -Röntgenabsorption nicht sehr wesentlich; aber daß sie wesentlich sein können, zeigt die Tatsache, daß die kontinuierliche Absorption für die Alkalien 20 mal kleiner ist als die, die man aus einem wasserstoffähnlichen Modell berechnet. Nun ist die Strahlung in der Nähe der Kante für das astronomische Problem besonders wichtig; denn die mittlere

* National Research Fellow and Fellow of the International Education Board.

** H. A. Kramers, Phil. Mag. (6) 46, 836, 1923.

*** A. S. Eddington, Internal Constitution of the Stars, Chap IX. Cambridge 1926.

Translationsenergie der Elektronen ist nur ein Bruchteil der mittleren Energie der Quanten. Es besteht also die Möglichkeit, daß die Kramerssche Formel zwar für die Bremsstrahlung, nicht aber für die Strahlung eines Elektrons im Felde eines nackten Kernes die richtigen Werte liefert.

Wir werden sehen, daß die Quantenmechanik eine Strahlung ergibt, die von der Kramersschen wesentlich abweicht. Zum Vergleich geben wir die Kramerssche Formel wieder: Wenn ein Strom von ein Elektron pro Zeit- und Flächeneinheit mit der Geschwindigkeit v auf einen Z -fach geladenen Kern stößt, so lautet sie für die pro Zeit- und Frequenzeinheit ausgestrahlte Energie

$$I_\nu = \frac{32 \pi^2 Z^2 e^6}{3 \sqrt{3} c^3 m^2 v^2} g. \quad (1)$$

Diese Formel gilt bis zur Kantenfrequenz $\nu_0 = \frac{m v^2}{2 h}$. In (1) hat die Größe g an der Kante den Wert 1, und wächst mit abnehmender Frequenz sehr langsam an; sie wird mit verschwindender Frequenz logarithmisch unendlich. Die Formel (1) schreiben wir

$$I_\nu = \frac{\pi}{\sqrt{3}} Q g = 1.8 Q g,$$

wobei

$$Q = \frac{32 \pi Z^2 e^6}{3 c^3 m^2 v^2}. \quad (2)$$

Es wird sich nun ergeben, daß diese Aussagen für kleine Frequenzen richtig bleiben; für größere Frequenzen, und besonders in der Nähe der Kante, finden wir ein ganz anderes Verhalten. Für sehr große Geschwindigkeiten — solche, die einer Energie entsprechen, die das Hundertfache der Ionisationsarbeit übertrifft — ist die Strahlung sogar geringer als die nach (1) berechnete. Aber in dem Gebiet, das in den Sternen in Betracht kommt, ist sie 10- bis 30mal größer.

Wir gehen nun zur Rechnung über. Sie läßt sich nach bekannten Methoden durchführen, indem man die Matrixkomponenten der Polarisation ausrechnet und in die quantenmechanische Formel* für die Intensität der Strahlung einsetzt. Da die Bewegungsrichtung der Elektronen nach dem Sprung beliebig ist, kommt bei uns noch eine Integration über diese Richtungen vor; und es handelt sich nur darum, die Rechnung so zu führen,

* Hierbei vernachlässigen wir den Impuls der Strahlung, das ist für die Anwendung der Ergebnisse im Innern der Sterne wegen der geringen Geschwindigkeiten erlaubt. Für die Berechnung der Intensität sehr harter Strahlung wären unsere Formeln nicht anwendbar.

daß man die Größe der Strahlung bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit möglichst leicht ablesen kann.

Es soll ein Strom von ein Elektron pro Zeit- und Flächeneinheit mit den Geschwindigkeitskomponenten 0, 0, v auf einen Z -fach geladenen Kern stoßen. Wir führen die parabolischen Koordinaten

$$\xi = r + z; \quad \eta = r - z; \quad \varphi = \arctang \frac{y}{x}; \quad dv = \frac{1}{4} (\xi + \eta) d\xi d\eta d\varphi$$

und die Abkürzungen

$$a = \frac{h^2}{4\pi^2 m Z e^2}; \quad k = \frac{2\pi m v}{h}; \quad n = \frac{1}{ak} = \frac{2\pi Z e^2}{h v}; \quad \nu = \frac{kv}{4\pi} = \frac{RZ^2}{n^2}$$

ein. Dann lautet die Wellengleichung

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\eta} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \left[\frac{k^2}{4} (\xi + \eta) + \frac{1}{a} \right] \psi = 0.$$

Der Ausgangszustand der Elektronen läßt* sich dann durch eine Lösung dieser Gleichung einfach darstellen:

$$\psi_0 = C e^{ik/2 \cdot (\xi - \eta)} F(i n, 1, ik \eta). \quad (3)$$

Setzt man

$$|C|^2 = e^{\pi n} \cdot \Gamma(1 - in) \cdot \Gamma(1 + in) \cdot v^{-1},$$

so entspricht (3) dem oben festgestellten Elektronenstrom. Hierbei ist F die entartete hypergeometrische Funktion

$$F(a, b, x) = \frac{\Gamma(b)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0) (x)} e^s s^{a-b} (s-x)^{-a} ds.$$

Wir gebrauchen ihre Reihenentwicklung

$$F(a, b, x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a + \tau) x^\tau}{\Gamma(b + \tau) \tau!} \quad (4)$$

und ihren asymptotischen Wert für große $|x|$

$$F(a, b, x) \approx \Gamma(b) \left\{ \frac{(-x)^{-a}}{\Gamma(b-a)} + \frac{x^{a-b} e^x}{\Gamma(a)} \right\}. \quad (5)$$

Das System der Lösungen der Wellengleichung, die zum kontinuierlichen Spektrum gehören, ist

$$\left. \begin{aligned} \psi_{\pm m \alpha n} &= \bar{\psi}_{\mp m \alpha n} \quad \left(\begin{array}{l} m = 0, 1, 2 \dots \infty \\ -\infty \leq \alpha \leq \infty; 0 \leq n \leq \infty \end{array} \right) \\ &= N_{m \alpha n} e^{i m \varphi + i k/2 (\xi - \eta)} F\left(\frac{m+1}{2} + i \alpha, m+1, -i k \xi\right) \\ &F\left(\frac{m+1}{2} + i \alpha + i n, m+1, i k \eta\right) (\xi \eta)^{m/2}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

* W. Gordon, ZS. f. Phys. 48, 180, 1928.

Da (3) axialsymmetrisch ist, werden wir nur $\psi_{0\alpha n}$ und $\psi_{\pm 1\alpha n}$ zu gebrauchen haben. Diese normieren wir in der αv -Skale gemäß der Bedingung

$$\int d v \bar{\psi}_{m\alpha n} \int_{\Delta\alpha} d\alpha' \int_{\Delta v} d v' \psi_{m\alpha' v'} = 1 \quad \text{für} \quad \begin{array}{l} \alpha i n \Delta \alpha \\ v i n \Delta v \end{array}.$$

So erhält man für die normierenden Faktoren N z. B. — vgl. (5) —

$$N_{0\alpha v}^{-2} = \frac{e^{\pi n} v k^{-2} (I_a + I_b)}{2 |\Gamma(\frac{1}{2} - i\alpha)|^2 |\Gamma(\frac{1}{2} - i\alpha - in)|^2},$$

$$I_a = 8 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi} \frac{d\eta}{\eta} \sin \left\{ \ln \frac{\eta}{\xi} \cdot \Delta \alpha \right\} \cdot \sin \left\{ \frac{\Delta k}{2} \cdot (\xi + \eta) \right\} \cdot \left(\ln \frac{\eta}{\xi} \right)^{-1} = 2\pi^2,$$

$$I_b = 8 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi} \frac{d\eta}{\eta} \sin \left\{ \ln \xi \eta \cdot \Delta \alpha \right\} \cdot \sin \left\{ \frac{\Delta k}{2} \cdot (\xi - \eta) \right\} (\ln \xi \eta)^{-1} \frac{\xi + \eta}{\xi - \eta} = 2$$

So wird

$$N_{0\alpha v}^2 = 4\pi m k h^{-1} (e^{\pi\alpha} + e^{-\pi\alpha})^{-1} (e^{\pi\alpha} + e^{-\pi\alpha - 2\pi n})^{-1} \quad (7)$$

und

$$N_{\pm 1\alpha v} = 4\pi m k^3 h^{-1} \alpha (\alpha + n) (e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha})^{-1} (e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha - 2\pi n})^{-1}. \quad (8)$$

Für die Strahlung, die mit ihrem elektrischen Vektor parallel z polarisiert ist, hat man dann

$$I_z = \frac{64\pi^4 |C|^2 (v - v')^4 e^2}{3c^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha N_{0\alpha v}^2 |I_\alpha^z|^2, \quad (9)$$

wobei

$$I_\alpha^z = \frac{\pi}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty d\xi d\eta (\xi^2 - \eta^2) \bar{\psi}_0 \psi_{0\alpha n'}.$$

Für die senkrechte Komponente gilt

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \frac{64\pi^4 |C|^2 (v - v')^4 e^2}{3c^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha N_{1\alpha v}^2 |I_\alpha^x|^2, \\ I_\alpha^x &= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty d\xi d\eta (\xi + \eta) (\xi \eta)^{1/2} \bar{\psi}_0 \psi_{\pm 1\alpha n'} e^{\mp i\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Gebraucht man die Beziehungen*

$$\left. \begin{aligned}
 b F(a, b, x) &= (b - a) F(a, b + 1, x) + a F(a + 1, b + 1, x), \\
 x F(a, b, x) &= (b - a) F(a - 1, b, x) - (b - 2a) F(a, b, x) \\
 &\quad - a F(a + 1, b, x), \\
 \int_0^\infty \xi d\xi e^{i \frac{k+k'}{2} \xi} F(a, b, -ik\xi) F(a', b, -ik'\xi) \\
 &= \frac{(b - a - a')u + a' - a}{i(k - k')} \cdot \int_0^\infty d\xi e^{i \frac{k+k'}{2} \xi} F(a, b, -ik\xi) F(a', b, -ik'\xi),
 \end{aligned} \right\} (11)$$

wobei

$$u = \frac{k - k'}{k + k'} = \frac{n' - n}{n' + n}$$

ist, so lassen sich I_α^x und I_α^x auf die Integrale

$$I_1 = \int_0^\infty d\xi e^{-i \frac{k+k'}{2} \xi} F(\frac{1}{2} - ia, 1, ik'\xi);$$

$$I_2 = \int_0^\infty \xi d\xi e^{-i \frac{k+k'}{2} \xi} F(1 - i\alpha, 2, ik'\xi),$$

$$I_3 = \int_0^\infty d\eta e^{i \frac{k+k'}{2} \eta} F(-in, 1, -ik\eta) F(\frac{1}{2} - i\alpha - in, 1, -ik'\eta),$$

$$I_4 = \int_0^\infty \eta d\eta e^{i \frac{k+k'}{2} \eta} F(-in, 2, -ik\eta) F(1 - i\alpha - in', 2, -ik'\eta),$$

$$I_5 = \int_0^\infty \eta d\eta e^{i \frac{k+k'}{2} \eta} F(1 - in, 2, -ik\eta) F(1 - i\alpha - in', 2, -ik'\eta)$$

zurückführen.

Diese Integrale konvergieren nicht. Da man aber aus den Bewegungsgleichungen und der Konvergenz der Beschleunigungsmatrixintegrale weiß, daß die entsprechenden Matrixkomponenten existieren, kann man die Integrale durch Verschiebung des Integrationsweges um einen Viertelkreis in der unteren bzw. oberen ξ - bzw. η -Ebene auswerten. Denn für diese Integrale verschwinden bei der Beschleunigungsmatrix die längs dem unendlichen Viertelkreis genommenen Terme, und man kann die

* P. S. Epstein, Phys. Rev. (2) 27, 695, 1926.

Integrale über die imaginäre ξ - bzw. η -Achse durch Einsetzen der Reihenentwicklungen (4) gliedweise integrieren*. So findet man

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \int_0^{-i\infty} e^{-i\frac{k+k'}{2}\xi} F\left(\frac{1}{2} - i\alpha, 1, ik'\xi\right) = \frac{-2i}{k+k'} u^{-1/2+i\alpha}, \\ I_2 &= \frac{-4}{(k+k')^2} u^{-1+i\alpha}. \end{aligned} \right\} (12)$$

Ferner wird

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{+i\infty} d\eta e^{i\frac{k+k'}{2}\eta} F(-in, 1, -ik\eta) F\left(\frac{1}{2} - i\alpha - in', 1, -ik'\eta\right) \\ &= \frac{2i}{k+k'} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-in+s)}{\Gamma(-in)s!} F\left(\frac{1}{2} - i\alpha - in', s+1, 1, \frac{2k'}{k+k'}\right) \\ &= \frac{2i}{k+k'} u^{-1/2+i\alpha+in'} \sum_s \frac{\Gamma(-in+s)}{\Gamma(-in)s!} \\ &\quad F\left(\frac{1}{2} - i\alpha - in', -s, 1, \frac{2k'}{k+k'}\right) \\ &= \frac{2i}{k+k'} u^{-1/2+i\alpha+in'} \sum_s \frac{\Gamma(-in+s)}{\Gamma(-in)s! |\Gamma(\frac{1}{2} - i\alpha - in')|^2} \\ &\quad \cdot \int_0^1 dz z^{-1/2-i\alpha-in'} (1-z)^{-1/2+i\alpha+in'} \left(\frac{2k}{k+k'} + \frac{4kk'z}{k^2-k'^2}\right)^s \\ &= \frac{2i}{k+k'} \frac{e^{-\pi n} u^{-1/2+i\alpha+in'}}{|\Gamma(\frac{1}{2} - i\alpha - in')|^2} \int_0^1 dz z^{-1/2-i\alpha-in'} \\ &\quad (1-z)^{-1/2+i\alpha+in'} \left(u + \frac{4kk'z}{k^2-k'^2}\right)^{in} \\ &= \frac{2ie^{-\pi n}}{k+k'} \cdot u^{-1/2+i\alpha+in'+in} F\left(-in, \frac{1}{2} - i\alpha - in', 1, -q\right), \end{aligned} (13)$$

wo

$$q = \frac{4kk'}{(k-k')^2}.$$

Und

$$\left. \begin{aligned} I_4 &= \frac{-4e^{-\pi n}}{(k+k')^2} u^{-1+i\alpha+in'+in} F(-in, 1 - i\alpha - in', 2, -q), \\ I_5 &= \frac{+4e^{-\pi n}}{(k+k')^2} u^{i\alpha+in'+in} F(1 - in, 1 - i\alpha - in', 2, -q). \end{aligned} \right\} (14)$$

* Den Hinweis auf diesen Kunstgriff verdanke ich Herrn Prof. Pauli, der die Methode für die analoge Rechnung in Polarkoordinaten gebraucht hat.

Daraus wird, unter Benutzung von (11) und $u = \frac{n' - n}{n' + n}$

$$\left. \begin{aligned} |I_{\alpha}^z| &= \frac{4\pi u^{-3} e^{-\pi n}}{(k+k')^4} \left| (1 - 2i\alpha - 2in') F\left(-in, \frac{3}{2} - i\alpha - in', 1, -q\right) \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - 2i\alpha - 2in' + \frac{4in n'}{n+n'}\right) F\left(-in, \frac{1}{2} - i\alpha - in', 1, -q\right) \right|, \\ |I_{\alpha}^x| &= \frac{32\pi u^{-4} e^{-\pi n}}{a(k+k')^6} |F(1 - in, 1 - i\alpha - in', 2, -q)|. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Die Integration über α läßt sich ausführen. Sie führt aber zu unendlichen Reihen — im wesentlichen die, die man direkt erhält, wenn man mit Polarkoordinaten rechnet —, die für numerische Auswertung ungeeignet sind. Wir werden also die Rechnung für drei Spezialfälle durchführen; die Werte der Emission sind dann für beliebige Frequenzen und Geschwindigkeiten durch eine kleine graphische Interpolation erhaltbar. Die drei Fälle sind:

a) $n' \rightarrow \infty$. Das entspricht der Kante und ihrer unmittelbaren Nähe. Das Gebiet der Gültigkeit dieser Formeln wird für große Geschwindigkeiten klein. Deshalb betrachten wir auch

b) $n \rightarrow 0$. Dadurch können wir die Emission für alle Geschwindigkeiten in dem Frequenzbereich $v_0 \leq v \leq \frac{7}{8} v_0$ bestimmen.

c) $q \rightarrow \infty$. Das entspricht dem entgegengesetzten Grenzfall langer Wellen. Aber diese Näherung hat ein viel größeres Anwendungsgebiet, da $1/q$ bis zu Frequenzen $\frac{3}{4} v_0$ recht klein bleibt.

Die Kurven lassen sich dann ohne wesentliche Unbestimmtheit von $v = 0$ bis $v = v_0$ ziehen.

a) Für $n' \rightarrow \infty$ werden

$$\begin{aligned} |F(1 - in, 1 - i\alpha - in', 2, -q)| &\sim |F(1 - in, 2, 4in\tau)|, \\ &\left| (1 - 2i\alpha - 2in') F\left(-in, \frac{3}{2} - i\alpha - in', 1, -q\right) \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - 2i\alpha - 2in' + \frac{4in n'}{n'+n}\right) F\left(-in, \frac{1}{2} - i\alpha - in', 1, -q\right) \right|, \\ &\sim 4n \left| \tau^{-1} \frac{\partial}{\partial \tau} \tau^2 F(-in, 1, 4in\tau) \right|, \end{aligned}$$

wobei $\tau = 1 + \alpha/n'$. Die Integrale über α müssen dann nur über die Strecke $-n'$ bis 0 genommen werden, und man erhält

$$\left. \begin{aligned} I^z &= 4\pi n Q \mathfrak{D}_n, \\ I^x &= \frac{8\pi n^3}{3} Q \mathfrak{X}_n, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

wo Q durch (2) gegeben ist, und

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_n &= \frac{2\pi n}{e^{2\pi n} - 1} \int_0^1 d\tau \tau^{-2} \left| \frac{\partial}{\partial \tau} \tau^2 F(-in, 1, 4in\tau) \right|^2, \\ \chi_n &= \frac{12\pi n}{e^{2\pi n} - 1} \int_0^1 d\tau \cdot \tau \cdot (1 - \tau) |F(1 - in, 2, 4in\tau)|^2. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Diese sind nicht durch elementare Funktionen darzustellen. Für große Geschwindigkeiten findet man unter Gebrauch von (4)

$$\vartheta_n = 1 - \pi n, \quad \chi_n = 1 - \pi n. \quad (18)$$

Für kleine Geschwindigkeiten kann man eine asymptotische Formel für F benutzen. Aber da hier auch ein Parameter groß wird, ist (5) ungültig; nach der Sattelpunktmethode findet man

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \tau^2 F(in, 1, -4i\tau n) \} &\sim 2n^2 \tau F(1 + in, 2, -4i\tau n), \\ &\sim 4in^2 \tau \left\{ \frac{e^{\pi/2n} (4\tau n)^{1-in}}{\Gamma(1-in)(1-1/4\tau)^{-in}} - \frac{e^{\pi/2n} (4\tau n)^{1+in}}{\Gamma(1+in)(1-1/4\tau)^{in}} \right\}. \end{aligned}$$

Das ergibt

$$\vartheta_n \approx \frac{3n^2}{8}, \quad \chi_n \approx \frac{3}{4n^2} \left(\ln 4 - \frac{3}{4} \right) \sim \frac{48}{n^2}. \quad (19)$$

Für zwischenliegende Werte von n kann man F mittels (4) berechnen und die Integrale graphisch abschätzen. Die so erhaltene Emission ist

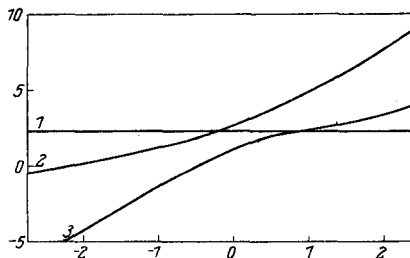


Fig. 1.

Als Abszisse ist $\ln_e n$ aufgetragen. Als Ordinaten sind aufgetragen

1. $\ln 10$
2. $\ln I^2/Q$ an der Kante
3. $\ln I^2/Q$ " " "

in Fig. 1 aufgetragen, und zwar logarithmisch. Die numerischen Werte der ϑ_n, χ_n sind durch die Formeln

$$\vartheta_n = \frac{3\pi(n/2)^3 + (1 + \pi^2 n^2)^{1/2}}{1 + \pi n}, \quad \chi_n = \frac{1 + \pi n^2}{(1 + \pi n)(1 + 2n^3)} \quad (20)$$

mit großer Annäherung (innerhalb 10 %) gegeben. Diese stimmen in den zwei Grenzfällen mit (18) und (19) überein und dürften für die Berechnung der Emission in der Nähe der Kante ausreichen.

Wenn $n \rightarrow 0$, gelten

$$\begin{aligned} & \left| (1 - 2i\alpha - 2in') F\left(-in, \frac{3}{2} - i\alpha - in', 1, -q\right) \right. \\ & - \left. \left(1 - 2i\alpha - 2in' + \frac{4inn'}{n+n'}\right) F\left(-in, \frac{1}{2} - i\alpha - in', 1, -q\right) \right| \sim \frac{4nn'}{n+n'} \\ & \quad |F(-in, 1 - i\alpha - in', 2, -q)| \\ & \sim |2^{1/2} q^{-1} (\alpha + n')^{-1} (1 - \cos \{2(\alpha + n') \ln u\})^{1/2}|. \end{aligned}$$

Da

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha (e^{\pi\alpha} + e^{-\pi\alpha})^{-1} (e^{\pi\alpha} + e^{-\pi\alpha - 2\pi n'})^{-1} = \frac{n'}{1 - e^{-2\pi n'}}$$

wird

$$I^z = 4\pi n Q \frac{(1 - n^2/n'^2)^2}{1 - e^{-2\pi n'}}$$

Also wird an der Kante

$$\frac{\partial \ln I^z}{\partial \ln \nu} = -2. \tag{21}$$

Ferner, da

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{\alpha(\alpha + n')}{(e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha})(e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha - 2\pi n'})} = \frac{n'(1 + n'^2)}{6(1 - e^{-2\pi n'})}$$

wird, wieder in der Nähe der Kante

$$I^x = \frac{8\pi n^3}{3} Q \frac{1 + 1/n'^2}{1 - e^{-2\pi n'}}$$

und

$$\frac{\partial \ln I^x}{\partial \ln \nu} = -\frac{1}{n'^2} \text{ für } n' \rightarrow \infty. \tag{22}$$

Trägt man Emission gegen ν/ν_0 auf, so wächst die Tangente an der Kante mit n . Für die parallele Komponente ist sie dreimal so groß wie für die senkrechte.

c) Bis auf Glieder in $1/q$ gilt* für $q \rightarrow \infty$

$$\left. \begin{aligned} |I_\alpha^z| &= \frac{4\pi q^{3/2} \delta e^{-\pi n}}{(k+k')^4} \left| \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - i\alpha - i\delta) \cdot q^{+in}}{\Gamma(\frac{1}{2} - i\alpha - in') \Gamma(1 + in)} + \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + i\alpha + i\delta) \cdot q^{i\alpha + in'}}{\Gamma(\frac{1}{2} + i\alpha + in') \Gamma(1 - in)} \right| \\ |I_\alpha^x| &= \frac{32\pi q e^{-\pi n}}{a(k+k')^6} \left| \frac{\Gamma(-i\alpha - i\delta) \cdot q^{in}}{\Gamma(1 - i\alpha - in') \Gamma(1 + in)} + \frac{\Gamma(i\alpha + i\delta) \cdot q^{i\alpha + in'}}{\Gamma(1 + i\alpha + in') \Gamma(1 - in)} \right| \end{aligned} \right\} \tag{23}$$

* Whittaker und Watson, Modern Analysis, Abs. 14, 51, Cambridge 1920. In der dritten Ausgabe ist die Endformel falsch.

wobei $\delta = n' - n$ ist. Das ergibt

$$I^z = \frac{4\pi Q n}{n+n'} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha$$

$$\frac{1 + \cos\{(\alpha + \delta)\ln q + 2 \arg \Gamma(\frac{1}{2} + i\alpha + i\delta) + 2 \arg \Gamma(1 + in) + 2 \arg \Gamma(\frac{1}{2} - i\alpha - in')\}}{(e^{\pi\alpha} + e^{-\pi\alpha}) (e^{\pi\alpha} + e^{-\pi\alpha - 2\pi\delta})},$$

$$I^x = \frac{32\pi Q n^3 n'}{(n'+n)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha$$

$$\frac{1 + \cos\{(\alpha + \delta)\ln q + 2 \arg \Gamma(i\alpha + i\delta) + 2 \arg \Gamma(1 + in) + 2 \arg \Gamma(1 - i\alpha - in')\}}{(1 + \delta/\alpha) (e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}) (e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha - 2\pi\delta})}.$$

Diese Integrale lassen sich durch geeignete Verschiebung des Integrationsweges in der oberen bzw. unteren α -Ebene berechnen, wobei die Verschiebung immer so durchzuführen ist, daß auf dem Integrationswege die aus dem \cos herrührende Terme im Limes $q \rightarrow \infty$ verschwinden. In I^z sind die Residuen, am Pol auf der reellen Achse zu halbieren. So wird, wieder bis auf Glieder in $1/q$:

$$\left. \begin{aligned} I^z &= \frac{4\pi Q n \delta}{(n+n')(1-e^{-2\pi\delta})} [1 + (4nn')^{-1/2} \sin\{\delta \ln q - \gamma\}], \\ I^x &= \frac{16\pi Q n^3 n' \delta}{(n+n')^4 (1-e^{-2\pi\delta})} \left[\ln \left\{ 16nn' + \frac{4nn'}{\delta^2} \right\} - 2 \right]. \end{aligned} \right\} (24)$$

Hierbei ist

$$\gamma = 2 \arg \{ \Gamma(1 + in') \cdot \Gamma(1 - in) \cdot \Gamma(1 - i\delta) \}.$$

Diese Größe verschwindet quadratisch in n und δ .

Da nun bei $v = \frac{3}{4} v_0$, $q = 8$ ist, liefert (24) eine gute Näherung für den größeren Teil des Frequenzbereichs. Dieser Bereich nimmt natürlich für sehr kleine Geschwindigkeiten ab, denn für die Gültigkeit von (23) muß vorausgesetzt werden, daß n/q noch klein sei.

In den Fig. 2 und 3 sind die Punkte bis zu $\frac{3}{4} v_0$ aus (24) bestimmt; in der Nähe der Kante gebraucht man (16), (21), (22). Aus diesen Kurven sieht man, daß für $n \leq \frac{1}{4}$ die spektrale Verteilung nicht sehr von der Kramersschen abweicht. Bei kleineren Geschwindigkeiten ist jedoch die Strahlung in der Nähe der Kante verhältnismäßig nun viel größer. Andeutungen eines solchen Effekts scheinen in der Tat von Kulenkampff gefunden worden zu sein*. Diese Anhäufung der Strahlung in

* H. Kulenkampff, Handb. d. Physik XXIII, 450, 1926; auch Ann. d. Phys. (4) 79, 548, 1922.

der Nähe der Kante hat auch die Folge, daß die mit dicken Platten beobachteten spektralen Verteilungskurven für kleine Spannungen an der Kante steiler ansteigen müssen als nach (1); und das würde den beobachteten Knick erklären können. Diese Meinung ist dadurch gestützt, daß bei gegebener Spannung die Größe des Knickes stark mit wachsender Atomnummer, also wachsendem n , zunimmt*. An den Kurven sieht man ferner,

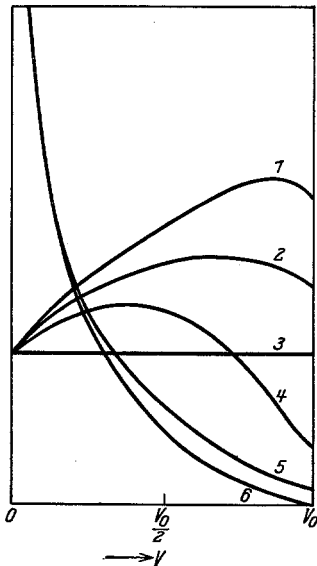


Fig. 2.

Als Ordinaten sind aufgetragen

1. I^2/Q für $n = 1/4$
2. I^2/Q „ $n = \frac{1}{2\pi}$
3. 1
4. I^2/Q „ $n = \frac{1}{8\pi}$
5. I^2/Q „ $n = 1/4$
6. I^2/Q „ $n = 0$

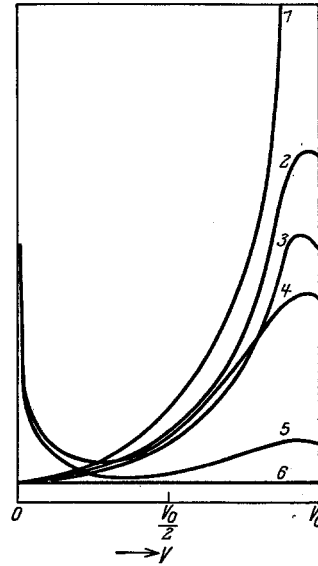


Fig. 3.

Als Ordinaten sind aufgetragen

1. I^2/Q für $n = 2$
2. I^2/Q „ $n = \sqrt{2}$
3. I^2/Q „ $n = 1$
4. I^2/Q „ $n = 2$
5. I^2/Q „ $n = 1$
6. 1

daß die Isochromaten im allgemeinen langsamer mit wachsender Spannung zunehmen müßten als nach der Kramersschen Theorie.

In Fig. 4 ist die Gesamtstrahlung als Funktion der Anfangsgeschwindigkeit aufgetragen. Da diese von der durch (1) gegebenen stark abweicht, dürfte sie kaum mit der Erfahrung im Bremsspektrum in

* H. Kulenkampff, l. c., S. 455, Abb. 11.

Einklang stehen. In Fig. 5 ist die Polarisation an der Kante aufgetragen. Sie ist durch

$$P = 100 \cdot \frac{I^z - \frac{1}{2} I^x}{I^z + \frac{1}{2} I^x}$$

definiert. Man sieht, daß ihr Wert nie unter 75 fällt; dieser ist sehr viel größer als der, den man bei dicken Schichten in der Röntgenröhre findet*. Die Diskrepanz dürfte zum Teil auf fast elastische Zusammenstöße im Metall, zum Teil aber, wie auch die Diskrepanz in der Größe der Gesamtstrahlung, auf die Abschirmung der atomaren Elektronen zurückzuführen sein.

Um diese Ergebnisse auf die Berechnung der „Undurchsichtigkeit“ der Sterne anwenden zu können**, muß man auch die Strahlung mit berücksichtigen, die dem Einfangen des Elektrons in einem gebundenen Zustande entspricht. Denn die Größe der kontinuierlichen Strahlung ist zwar eine notwendige, nicht aber eine hinreichende Bedingung für die Größe der Undurchsichtigkeit; und die Strahlung, die dem Einfangen entspricht, ist auch erheblich größer als die, die Eddington** diesen Sprüngen zugeschrieben hat. Nach derselben Methode, die wir gebraucht haben, um (9), (10) und (15) abzuleiten, findet man nämlich für die gesamte

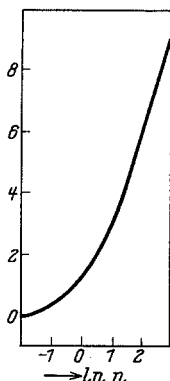


Fig. 4.

Als Ordinate ist aufgetragen

$$\ln_e \left\{ \frac{\int_0^{\nu_0} (I^z + I^x) d\nu}{2 Q \nu_0} \right\}$$

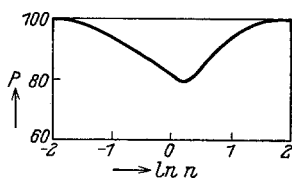


Fig. 5.

Intensität der Strahlung, die mit dem Einfangen im n -ten Zustande verknüpft ist:

$$I^z = 4\pi^2 Q R Z^2 N^{-4} \frac{e^{-4n \arctan N/n}}{1 - e^{-2\pi n}} S_1,$$

$$S_1 = \sum_{\alpha=0}^{N-1} \left| (N - \alpha - 1) F \left(-in, 2 + \alpha - N, 1, \frac{-4inN}{(N + in)^2} \right) - \left(N - \alpha - 1 - \frac{2inN}{N - in} \right) F \left(-in, 1 + \alpha - N, 1, \frac{-4inN}{(N + in)^2} \right) \right|^2,$$

* H. Kulenkampff, Handb. d. Phys. XXIII, 450, 1926; auch Ann. d. Phys. (4) 79, 548, 1922.

** A. Eddington, l. c.

für die parallele Komponente und

$$I^x = \frac{64 \pi^2 Q R Z^2 N^{-2} e^{-4n \arctan N/n}}{(1 + N^2/n^2)^2} \frac{1}{1 - e^{-2\pi n}} S_2,$$

$$S_2 = \sum_{\alpha=0}^{N-2} (\alpha + 1) (N - \alpha - 1) \left| F \left(1 - in, 2 + \alpha - N, 2, \frac{-4inN}{(N + in)^2} \right) \right|^2$$

für die senkrechte*. Wiederholt man nun die Eddingtonsche Rechnung, so ist an den allgemeinen Ergebnissen wenig zu ändern. Wegen der expliziten Abhängigkeit von der effektiven Kernladung, die nun auftritt, und wegen ihrer Abhängigkeit von der Temperatur wächst die Undurchsichtigkeit etwas langsamer mit abnehmender Temperatur. Man findet

$$k_2 \propto T^{-3.2} \quad \text{statt} \quad k_2 \propto T^{-7/2}.$$

Das liegt aber durchaus im Bereich der astronomisch möglichen Verhältnisse:

$$k_2 \propto T^{-5/2} \quad \text{bis} \quad k_2 \propto T^{-7/2}.$$

Ferner kann man nun den von Eddington diskutierten Fall des Eisens in Capella numerisch untersuchen. Dabei hat man die effektive Kernladung gleich 25 zu setzen** und findet für die Undurchsichtigkeit $k_2 = 35$. Der von Eddington auf Grund der Kramersschen Theorie gefundene Wert war 4,95; der astronomisch berechnete Wert ist 53.

Herrn Prof. Pauli möchte ich für manche gute Ratschläge danken.

* Daraus findet man im Grenzfall $N \rightarrow \infty$ für die Strahlung pro Frequenzeinheit genau die Formeln (16).

** A. Eddington, l. c., Chap X.